

ELDÖNTÉSPROBLÉMA ÉS BIZONYÍTÁS. KALMÁR LÁSZLÓ ÉS LAKATOS IMRE MATEMATIKAFELFOGÁSÁNAK KAPCSOLÓDÁSI PONTJAI

GURKA DEZSŐ

Gál Ferenc Egyetem Pedagógiai Kara, Szarvas

e-mail: gurka.dezso@gmail.com

ABSTRACT

Research outcomes of the recent two decades have focused the attention on the Hungary-based concept historical backgrounds of Imre Lakatos's mathematical and science philosophy. In addition to György Pólya's heuristics and the empirical approaches of Sándor Karácsony's circle in Debrecen, László Kalmár's anti-formalist mathematical ideas exercised also a considerable impact on Lakatos, moreover, in more phases and in more aspects. Kalmár's conference lecture in London in 1965 contributed significantly to the elaboration of the quasi-empirical mathematics concept, but the works of the mathematician from Szeged was reflected by Lakatos not only in this discourse but in other topics as well, e.g. he also referred in several places to Kalmár's articles on the Church's Thesis. Kalmár's functionalist-operationalist position taken by him with regard to the wider problem circle of decision-making theory had direct impact on the development of Lakatos's proof concept. In line with Kalmár's axioma concept, Lakatos described proof not as a tool of coming to a deducted undeniable truth, but as a process of making something evident which can be characterised as a disassembly of suppositions into additional suppositions

and lemmas. This antiformalist proof idea was reflected also in Lakatos science philosophy, e.g. in the momentum of testing theorie.

Ajánlás

A kétezres évek elején a Műegyetem Fehér Márta által vezetett doktori iskolájának különböző kurzusain gyakorta merült fel a tudományfejlődés-elméletek reprezentánsainak neve. A kutatási irányzat akkori népszerűségét tekintve ebben nem is lett volna semmi meglepő, a műegyetemi filozófia tanszéknek egyébként is kulcsszerepe volt a tudományfilozófia új eredményeinek hazai recepciójában, a meglepő s a jó értelemben megszokhatatlan ezeknek a szemináriumoknak a metódusa volt. A három doktori program hallgatói péntekenként az órák zömét párhuzamosan, s ebből adódóan csupán néhány fős csoportokban látogatták. Úgy adódott – s ez a helyzet bizonyára többönnk számomra adódott így az évek során –, hogy Fehér Márta csoportjába egyetlen hallgatóként kerültem. Számomra mindmáig a kutatói és oktatói elhivatottság, s ezzel együtt a doktori képzés etalonja az a sokszorosan megisméltődött szituáció, hogy a Tanárnő a tanszéki irodájában, a zöld tábla előtt állva hétről hétre ugyanolyan nagyívű előadásokat tartott egyetlen doktorandusznak is, mint amilyeneket az előadótermekben vagy a konferenciákon hallhattunk tőle.

Bevezetés

Lakatos Imre magyarországi pályaszakaszának interpretációi az 1990-es évek végétől kezdődően egyre erőteljesebben vetették fel annak igényét, hogy feltárják az életmű kontinuitáselemeit, illetve a matematika- és tudományfilozófiai periódus legkorábbi előzményeit.¹ Ez a szempont

¹ Az életrajzok és a pszichológiai szempontú írások (Bandy 2000; Long 2002; Ravetz 2004) mellett a kétezres évek elejétől megjelentek a magyarországi pályaszakasz feltárását célzó interpretációk is (Ropolyi 2002; Kutrovátz 2002; Máté 2006; Gurka 2006; Kutrovátz 2008; Szabó Máté 2013, Dusek 2015; Szabó Máté 2018), míg az utóbbi két évtizedben napvilágot látott

általánosságban már a hetvenes évek végén megjelent – Ian Hacking például egyfajta „magyaros gondolkodási stílust” tulajdonított a tudományfilozófusnak (Hacking 1979: 383) –, a későbbiekben pedig számos kísérlet történt arra, hogy Lakatos egyes fogalmainak konkrét előzményeit identifikálják. Palló Gábor a progresszivitás (Palló 1996), Ropolyi László a kemény mag fogalmának magyarországi előzményeit (Ropolyi 2002), Kiss Olga Pólya György heurisztikájának Lakatos szemléletére gyakorolt hatását (Kiss 2002) vizsgálta, saját cikkeimben pedig azt mutattam be, hogy miként járult hozzá a debreceni Karácsony-körrel, illetve Kalmár Lászlóval való együttműködés a kváziempirikus matematikafelfogás kialakulásához (Gurka 2002, 2004, 2006).

Lakatos és Kalmár tudományos együttműködése leglátványosabb és leghatékonyabb formájában az 1965-ös londoni konferencián realizálódott, a matematika megalapozásával kapcsolatos problémafelvetéseik közös elemei azonban nagyrészt korábbi, magyarországi előzményekre vezethetők vissza. Mindkettőjük szemléletére jelentős hatást gyakorolt debreceni professzoruk, Karácsony Sándor, illetve a Karácsony-kör matematikus tagjainak 1941 és 1943 között működő szemináriumuma (Gurka 2006: 264-266). Lakatos és Kalmár több alkalommal is megújuló szakmai kapcsolata,² illetve az 1960-as évek második felében egyre intenzívebbé váló levelezésük felveti azt a kérdést, hogy a kváziempirikus szemlélet kialakulásához való közvetlen hozzájáruláson túl volt-e Kalmár matematikai munkásságának más olyan hatáseleme is, amely Lakatos érvelésében ismétlődő argumentációs elemként identifíkalható.

tanulmányok harmadik témacsoportját a matematika- és tudományfilozófiai hatásokat vizsgáló elemzések (Koetsier 1991; Glas 2001a, 2001b; Golden 2008) alkotják. A matematika- és tudományfilozófiai periódusok koherenciáját Forrai Gábor cikke tematizálta (Forrai 1993), Lakatos magyarországi pályaszakaszának fontosabb dokumentumai pedig Kutrovátz Gábor fordításában jelentek meg (Kutrovátz 2002, 353-374).

² Lakatos Kalmár Lászlóval 1954 és 1956 között is kapcsolatban állt, amikor is részt vett a szemináriumain (Long 2002: 289)

A továbbiakban (1) először azt mutatom be, hogy Kalmár munkásságában milyen szerepet töltött be az eldöntésprobléma, illetve a Church-tézis, (2) majd amellet érvelek, hogy Lakatos a kváziempirikus felfogást Kalmár munkásságának inspirációja nyomán összekapcsolta az eldöntésprobléma tágabb kérdéskörével, (3) végül pedig a bizonyítás Lakatos-féle matematikafilozófiai értelmezésének Kalmárhoz köthető előzményeit, illetve ezeknek a lakatosi tudományfilozófiára gyakorolt hatását rekonstruálom.

1. Az eldöntésprobléma és a Church-tézis szerepe Kalmár László munkásságában

Kalmár munkásságában a megoldhatatlan matematikai problémákat tagláló tanulmányok sorozata – a téma általánosabb felvetésétől, a Hilbert-féle programtól a Gödel-problémával és Church-tézissel foglalkozó cikkekig bezárólag – jól elkülöníthető vonulatot képez.³ Ezekben az írásokban a konkrét

³ A szóban forgó tematikus sor az alábbi hét tanulmányból áll:

- 1950. Another proof of the Gödel-Rosser incompleteness theorem. *Acta Scientiarum Mathematicarum* 12: 38-43.
- 1952. Az eldöntésprobléma visszavezetése logikai formulák véges halmazán való kielégíthetőség kérdésére. *Az I. Magyar Matematikai Kongresszus Közleménye* 2, 164–189.
- 1952. A matematika alapjával kapcsolatos újabb eredmények. *Az MTA Matematikai Fizikai Osztályának Közleményei* 2: 163-190.
- 1956. Ein direkter Beweis für die allgemein-rekursive Unlösbarkeit des Prädikatenkalküls der ersten Stufe mit Identität. *Zeitschrift für Mathematik, Logik und Grundlagen der Mathematik* 2: 1-14.
- 1956. Közvetlen bizonyítás az eldöntésproblémák általános rekurzív algoritlussal való megoldhatatlanságára. *Az MTA Matematikai Fizikai Osztályának Közleményei* 6: 1-25.
- 1957. Az úgynevezett megoldhatatlan matematikai problémákra vonatkozó kutatások alapjául szolgáló Church-féle hipotézisről. *Az MTA Matematikai Fizikai Osztályának Közleményei* 7: 19–38.
- 1959. An Argument against the Plausibility of Church's Thesis. In: *Constructivity in Mathematics*. Edited by Arend Heyting. New York – Amsterdam: North-Holland.

matematikai problémák vizsgálata a matematika megalapozásának tágabb összefüggésrendszerébe helyezve történt meg.

„Gödel gondolatmenete nagyon hasonlít ahhoz, amivel Cantor a transzcendens számok létezését megmutatta. Ez a hasonlóság arra a sejtésre vezet bennünket, hogy az eldönthetetlen problémák nem kivételes jelenség, hanem bizonyos értelemben ezek vannak többségben, – az a véletlen, ha egy probléma megoldható” – szögezte le Kalmár *Egyszerű példa eldönthetetlen aritmetikai problémára* című korai írásában (Kalmár 1943: 21). Cikkének egyik lábjegyzetében a fenti gondolat eredetét Karácsony Sándor főként matematikusokból álló debreceni tanítványi körének⁴ matematikai, konkrétan integrálszámítással kapcsolatos disputáihoz kötötte:

„E sejtés gondolatát [t.i. hogy az eldönthetetlen problémák nem kivételes jelenségek a matematikában] egy túlnyomórészt nem-matematikusokból álló, de matematika iránt érdeklődő társaság (Exodus) vetette fel 1942 nyarán matematikai kérdésekről (az integrálszámításról) való beszélgetésünk során.” (Kalmár 1943: 21, 7. jegyzet)⁵

E mondatok fényében az sem lehetett véletlen, hogy Kalmár fél évtizeddel később éppen az integrálszámítás kapcsán tartotta fontosnak, hogy egy családi ismerősük kérdésére negyven gépelt oldalnyi magánlevélben adjon a matematika szemléleti alapkérdéseire is kiterjedő tájékoztatást (Kalmár 1986a).

Karácsony Sándornak a konkrét és az absztrakt viszonyának átértékelésére alapozott pedagógiai erudíciója Kalmár későbbi írásain is nyomot hagyott, s az egykori tanítvány matematikaoktatással kapcsolatos meglátásai éppen a jelzett

⁴ Az 1941 és 1943 között működő szemináriumnak Kalmáron és Lakatoson kívül tagja volt Péter Rózsa, Varga Tamás, Szele Tibor, Vekerdi László és Fényes Imre is (Kontra 1995: 88).

⁵ Az eldöntéskérdés Péter Rózsa munkásságának is fontos részéért képezi. Vö. Péter 1953 és 1959.

előzményekhez kapcsolódó elméleti megfontolásokból indultak ki. Kalmár szubjektív hangvételű megnyilatkozásai gyakorta illették kritikával az iskolás precizitásnak azt a fajta követelményét, amely éppen a problematizálás lehetőségét oltotta ki azzal, hogy az ideális kivételeket állította előtérbe a gyakorlatban felmerülő esetekkel szemben.

Az 1947-ben keletkezett *Levél az integrálról* nem csupán időben volt közel Kalmár debreceni korszakához, hanem felfogásában is. Amellett, hogy ez az írás is továbbvitte az 1942-ben megjelent cikkének egzaktságra vonatkozó gondolatmenetét, az absztrakció új szempontú kritikája is felmerül benne. Kalmár a középiskolai matematikaoktatás példáját felhasználva a partikuláris elemekből való általánosítás problémájára fókuszált, mivel általánosan jellemző helyzet „Az, hogy csak egyenlőségekről tanítanak, egyenlőtlenségekről nem (holott az egyenlőség megint csak rendkívül ritka kivétel az egyenlőtlenségek között), meg hogy az iskolai 'pontosság'-fogalmat nem az élet, hanem a tanár piros ceruzája alakítja ki” (Kalmár 1986a: 213, 228).

A Karácsony-kör egykori vitái nem csupán a Kalmár számára mindig is fontos pedagógiai-oktatásmetodikai problémákkal kapcsolatban jelentettek szemléleti kiindulópontot. Kalmár e diskurzus időszakában, 1942-ben jelentette meg a Karácsony Sándor által szerkesztett *A másik ember felé* című kötetben *A matematikai egzaktság fejlődése a szemlélettől az axiomatikus módszerig* című cikkét, amely Karácsony terminológiájának közvetlen hatását mutatja (Gurka 2004: 270-271). *Egyszerű példa eldönthetetlen aritmetikai problémára* című 1943-as tanulmánya viszont már az eldöntésprobléma kapcsán hivatkozott a debreceni vitákra, s a későbbi írások perszeveráló szemléleti mozzanatai mellett ez az újból és újból exponált kérdéskör úgyszintén tudományos eszmélődése időszakára utal vissza.

Kalmár már 1943 előtt is több cikket írt az eldöntésprobléma kérdésköréről,⁶

⁶ Kalmár 1943 előtt megjelent az eldöntésprobléma témakörében:

így az Exodus-körrel történt együttműködése valójában nem a probléma fölvetését, hanem inkább annak nyomatékosítását eredményezte. Kalmár már e korai írásaiban összekapcsolta az empirikus felfogás és a megoldhatatlan matematikai problémák kérdéskörét.

A formális rendszerek problémája – jóllehet a Gödel és Church által exponált aspektusok említése nélkül – már *A matematika egzaktitás fejlődése a szemlélettől az axiomatikus módszerig* című írásában is egyértelműen megjelent: „Az axiómák nem evidens tényeket fejeznek ki, az alapfogalmak tehát bizonyos fokig határozatlanok” (Kalmár 1986b: 45). Kalmár ugyanitt fejtette ki axiómaértelmezését, amely a formalista gyakorlattól eltérően operacionalista jellegű: „az axiómák nem fogalmak jellemzésére valók, hanem annak meghatározására, hogy mely tételek tartoznak rendszerünkhöz” (Kalmár 1986b: 48). További érdekessége a cikknek, hogy Kalmár – a matematikus gondolkodását a külső és belső történet Lakatos-féle kategóriáira emlékeztető módon interpretálva – a történeti szempontú tárgyalást elválasztotta attól az úttól „amelyet az egyes matematikus jár meg, hogy a matematikai fogalmak és tételek egzakt rendszerét a maga számára kiépítse” (Kalmár 1986b: 38).⁷

- 1932. Ein Beitrag zum Entscheidungsproblem. *Acta Scientiarum Mathematicarum* 5: 222-236.

- 1933. Zum Entscheidungsproblem der mathematischen Logik. *Verhandlungen des Internationalen Mathematiker-Kongresses Zürich*. II. Herausgegeben von Walter Saxer. Zürich – Leipzig: Orell Füssli, 337-338.

- 1936. Zurückführung des Entscheidungsproblems auf den Fall von Formeln mit einer einzigen binären Funktionsvariablen. *Compositio Mathematica* 4: 137-144.

- 1937. Zur Reduktion des Entscheidungsproblems. *Norsk Matematisk Tidsskrift* 19: 121-130.

- 1939. On the reduction of the decision problem, I: Ackermann prefix, a single binary predicate. *Journal of Symbolic Logic* 4: 1-9.

⁷ Kalmár a cikk konklúziójaként még egyszer ütköztette a normatív és a történeti nézőpontot: „A tudományos szempontnak is jobban megfelel, ha a fejlődést és nem a kész axiomatikát adjuk elő; mert nem ez utóbbi fejezi ki a tudomány mai állapotát, hanem az, hogy a fejlődés útja ide vezet” (Kalmár 1986: 61).

Kalmár az eldöntésproblémát és az axiomatizálás kérdését *Előadások a matematika filozófiai problémáiról* című 1967-es kurzusában laikusokból, főként orvosokból álló közönség számára foglalta össze. A „A matematikai bizonyítás” című fejezetben a Church-tézis kapcsán az univerzális megoldhatóság lehetőségének hiányát hangsúlyozta: „A Church-féle tétel éppen azt bizonyítja be, hogy vannak olyan problémásereggek, amelyeknek nincs általános megoldása, hanem minden bennük szereplő problémához külön individuális megoldást kell keresni” (Kalmár 1986c: 167). Ugyanitt kiemelte az axiómarendszerek lezáratlanságának problémáját is: „A Gödel-tétel rámutat: problémamegoldáshoz szakadatlanul fejleszteni kell axiómarendszerünket, nincs univerzális axiómarendszer” (Kalmár 1986c: 166).

Kalmár munkásságának a részben a Karácsony-féle szemléletességfogalom hatására kibontakozó empirikus matematikafelfogás mellett az eldöntésprobléma a másik olyan eleme, amely a Debrecenből induló matematikus kör diskurzusaihoz köthető. E két problematika a vele való későbbi eszmecserék révén Lakatosnak a matematikai bizonyítás természetével kapcsolatos szemléletét is jelentős mértékben befolyásolta.

2. Kalmár eldöntésproblémával kapcsolatos írásainak recepciója Lakatosnál

Jóllehet a recepció egy kiterjedtebb diskurzus részét képezte, a Kalmár munkásságára történő hivatkozások zöme az 1965-ös londoni Lakatos-előadáshoz, illetve az ennek nyomán megírt cikkekhez köthető, vagyis azokhoz az írásokhoz, amelyek a kváziempirikus szemlélet egyes etapaiként is értékelhetők.

Kalmár *Foundations of mathematics – whither now?* című londoni előadásában megállapította, hogy az axiomatikus rendszerek már nem reflektálnak axiómaik empirikus eredetére, holott a matematikai absztrakció (közvetlenül vagy közvetett módon) az empirikus tényekből származik, s a legtöbb formális rendszer konzisztenciája a gyakorlatban való tesztelés

eredményeként áll elő (Kalmár 1967: 192).

Lakatos az 1965-ös londoni reflexiói nyomán 1967-ben megírt *Az empirizmus reneszánsza a mai matematikafilozófiában? (A renaissance of empiricism in the recent philosophy of mathematics?, 1976)*⁸ című cikkében Kalmár Church-tézissel, illetve a bizonyítás fogalmával kapcsolatos munkásságát több helyen is megemlíttette (Lakatos 2021b: 55, 64, illetve 46, 52). E hivatkozásokban Kalmár empirikus szemléletére is történt utalás, ám e tematika itt már nem kapott akkora hangsúlyt, mint magában a londoni előadásnak a szövegében. Az *Az empirizmus reneszánsza a mai matematikafilozófiában?* összekapcsolta a matematika kváziempirikus jellegének és a (formalizmus ellentendenciájaként értékelt) Church-tézisnek a problémáját: Church elmélete a kizárt harmadik (közép) törvényének a szűkített formáján alapszik, s így jelöli ki a kváziempirikus módszert (Lakatos 2021b: 50).⁹

Lakatos matematikafelfogásában központ szerepet kapott tehát a cáfolhatóság problémája, s pontosan ebből a szempontból emelte ki Kalmár munkásságának jelentőségét: alig valaki, kivéve Kalmárt, tanulmányozta a matematikai refutáció problémáját (Lakatos 2021b: 64).¹⁰

A Lakatos-Kalmár diskurzusban a szemléletesség és egzaktság fogalmainak exponálása kapcsán mindkettőjük számára egyre határozottabb alakot öltött az az

⁸ Lakatos 1967-ben, a konferencia anyagának megjelenése évében írta meg a hozzászóláson alapuló, azonos című, tanulmányát, amely csak 1976-ban, életművének gyűjteményes kötetében látott napvilágot. A hagyatékában fennmaradt tanulmányt a kötet szerkesztőinek megjegyzése szerint Lakatos azért nem publikálta, mert folytatni akarta azt, de érdeklődésének megváltozása miatt nem tért vissza e témára (szerkesztői jegyzet, Lakatos 2021b: 15).

⁹ „Church egy – a kizárt harmadik elvének egy korlátozott formuláján alapuló – érdekes matematikai elméletről szólva [...] felvázolja a kvázi-empirikus módszert.” (Lakatos 2021b: 50).

¹⁰ „Ugyanakkor alig néhányan tanulmányozták a cáfolat lehetőségeit [a matematikában].” (Lakatos 2021: 64). Lásd ugyanitt a 3. lábjegyzetet: „Figyelemreméltó kivétel Kalmár kritikája a Church-tézisről.”

álláspont, hogy nem lehetségesek zárt formális struktúrák.¹¹ Ez a meggyőződés Lakatos számára egyrészt a kváziempirikus felfogás iniciatívája volt, másrészt pedig kiindulópontját képezte a bizonyítás fogalmának nem formalista értelmezésének. E problematikák abban is szerepet játszottak, hogy a Lakatos-Kalmár kapcsolat a hatvanas évek végére új intenzitást nyert: Kalmár 1967-ben Churchről és Gödelről tartott előadást az LSE-n, s az előadással kapcsolatos levelezésükben tartalmi momentumokra is kitértek.¹²

Val Dusek 2015-ös tanulmányában kiemelte, hogy Kalmár László és Péter Rózsa nemzetközileg is jelentős résztvevője volt a Church-tézis körül zajló vitáknak,¹³ ugyanakkor leszögezte, hogy Lakatos nem vett részt Kalmár

¹¹ Kalmár a londoni konferencián Fred Sommers Frege-dogmával és Jack A. Easley matematikatanítási reformmal kapcsolatos előadásaihoz hozzászólva is fellépett a formalizmus ellen. Easley előadására reagálva, összegezte a Varga Tamás nevéhez kapcsolódó magyarországi reform céljait és eredményeit, s közvetlenül érintette a matematika megalapozásának problémáját is (Easley 1967: 235). Kalmár egyik levelében, utalva közös álláspontjukra is, a következő indoklással kérte Lakatostól, hogy e hozzászólását ne jelentesse meg: „Jobb nem bőszíteni a konzervatívokat, amíg meg nem erősödik a modernnek tábora” (Szabó Péter Gábor 2008: 215).

¹² „A sok fecsegés után a legfontosabb rendben van: a két dupla (két-két órás előadás Gödelről ill. Churchről; a matematikai struktúra levelében említett fogalma jó segítség, bár egy olyan struktúra, amelyben az n -tuple elemei közül több is domain (pl. az automata algebrai fogalma) sem ártott volna. A szemináriumon szívesen beszélek a Church-tézissel kapcsolatos filozófiai kérdésekről (jó-e a kiszámíthatóság definíciójának tekinteni; plauzibilitási érvek ellene is; mennyiben 'matematikai bizonyítéka' a Church-tétel a homo sapiens matematizálási korlátjainak (see E. L. Post, Journal of Symb. Logic 1 (1936), p. 105, footnote 8) stb.), ha nem unjátok, hogy folyton Churchről legyen szó.” (Szabó Péter Gábor 2008: 226-227)

¹³ Dénes Tamás a vitával kapcsolatban kiemelte, hogy Kalmár különbséget tett az abszolút megoldhatatlanság és a rekurzív módszerrel való megoldhatatlanság között: „Kalmár László (1905–1976) az 1948-as amszterdami Filozófiai kongresszuson tartott előadásában bebizonyította, hogy a Church-tézis a Gödel-tételből levezethető, így nem bizonyíthatja abszolút eldönthetetlen probléma létezését. Kalmár László hangsúlyozta, hogy ezeket a tételeket (Gödel, Church) szabatosan úgy kellene megfogalmazni, hogy a kérdéses problémásereg általános rekurzív eljárással nem oldható meg, nem pedig abszolút megoldhatatlanságról beszélni.” (Dénes

radikális, a Church-tézist elutasító álláspontjának védelmében (Dusek 2015: 68-70); Szabó Máté pedig Kalmár *An Argument against the Plausibility of Church's Thesis* (1959) című tanulmányát helyezte átfogó matematikatörténeti kontextusba (Szabó Máté 2018: 140-157). Lakatos hivatkozásai szintén azt mutatják, hogy számon tartotta egykori debreceni diáktársának e témába vágó írásait, sőt argumentációiban fel is használta azokat, jóllehet csupán Kalmár formalizmuskritikájával értett egyet maradéktalanul.¹⁴

3. Lakatos bizonyításfogalmának matematikafilozófiai és tudományfilozófiai vetületei

Lakatos kváziempirikus felfogása és a tudományos kutatási programok metodológiája közel egyidejűleg, közvetlenül a londoni konferencia után bontakozott ki. Toulmin méltán tartotta a Lakatos-pályakép egyik legfontosabb fordulópontjának az 1965-ös évet, amikor is a matematikai bázison kidolgozott metodológiák és problémafelvetések áttevődnek a fizika és a csillagászat területére. Toulmin azonban ezt a változást a Bedford Kollégiumban lezajlott Popper-Kuhn vita hatásából eredeztette, s úgy értékelte, mint Lakatos válaszát a tudományos forradalmak fogalmának kihívására (Toulmin 1976: 658).

A matematikai szemléletű, illetve matematikatörténeti argumentáció viszont Lakatos tudományfilozófiai aspektusú munkáinak is meghatározó specifikuma maradt. A formalizmus elutasítása nemcsak a logicizmus tudományfilozófiai aspektusú bírálatában mutatkozott meg nála, hanem – Cauchy, Hilbert, Cantor,

2003: 10)

¹⁴ A *Bizonyítások és cáfolatok* így körvonalazta az elvi kiindulópontot: „A matematikatörténet és a matematikai felfedezés logikája, azaz a matematikai gondolkodás filogenezise és ontogenezise csak a formalizmus kritikájával és végső elutasításával építhető fel” (Lakatos 1981: 18). A formalizmus elleni föllépése olyannyira radikális, hogy az az 1976-os kiadás sajtó alá rendezői, John Worrall és Elie Zahar számára nem volt vállalható, s lapalji megjegyzésekben próbálták mentesíteni mesterüket.

Weierstrass gondolatainak bírálata révén – a matematikatörténeti interpretációkban is. Mivel Lakatos a tesztelésnek nevezett módszert a matematika kváziempirikus szemléletének leírása kapcsán, illetve a matematika megalapozás-problémájának szempontjából vetette fel, a matematikai formalizmus leglátványosabb kudarcait előidéző matematikatörténeti momentumokat is beépítette írásaiba, elsősorban a Gödelre, Churchre és Turingra való hivatkozások kapcsán.

A formalizmus és a bizonyítás problémájának 1965 után pregnánssá váló összekapcsolásában Kalmár László hatásának kulcsszerepe lehetett. A szegedi professzor matematikafelfogását a formalista axioamatizálással szemben – jórészt a Gödel és Church által tematizált problémák hatására – egy olyan funkcionalista-operacionista jellegű szemlélet jellemezte, amely a matematika bizonyításfogalmának átértelmezésével járt együtt. Lakatos hasonló gondolati utat járt be, amikor saját kváziempirikus modelljében a megalapozásproblémáról – részben éppen a Church és Kalmár cikkeire való reflexiók kapcsán – a matematikai megismerés és a bizonyítás működésének vizsgálatára helyezte át a hangsúlyt.

E problémaeltolódást jelzi Lakatos *Cauchy és a kontinuum: A nemstandard analízis jelentősége a matematika történetében és filozófiájában* című cikke – *Cauchy and the continuum: the significance of nonstandard analysis for the history and philosophy of mathematics* (Lakatos 2021c) – is, amely 1966-ban keletkezett és 1968-ban jelent meg, s ahogyan Koetsier kiemelte, a tanulmány gondolatmenete már az elmélet kibontakozásának megnyilvánulása, s így nem tekinthető pusztán a kuhni kihívásra adott válasznak (Koetsier 1991: 92). Lakatos Cauchy gondolat kísérletét nem mint a bizonyítás igazságát, hanem mint kvázi-kísérletet prezentálta (Sherry 2006: 491).

Ugyanilyen értelemben jelenik meg a bizonyítás fogalma a Pólya György heurisztikáját a formális elméletek alternatívájaként értelmező (Dusek 2015: 67-71;) *Bizonyítások és cáfolatokban (Proofs and refutations)* is: „A bizonyítás

kifejezést az olyan gondolat kísérlet jelölésére használjuk, amely az eredeti sejtésnek további sejtésekre vagy lemmákra való lebontását eredményezi, nem pedig a kétségtelen igazság biztosítóka értelemben” (Lakatos 1981: 32).¹⁵ A kváziempirikus rendszerekben a kiinduló állítások, az axiómák lényegében hipotetikusak (Máté 2008: 63), s ennek a szemléletnek a jegyében fogalmazta meg Lakatos a *Bizonyítások és cáfolatok* célkitűzését is:

„Az itt következő tanulmány lényege vitatja a matematikai formalizmust, de a matematikai dogmatizmus végső állításait közvetlenül nem támadja. Szerény célja annak a nézetnek a kifejtése, hogy az informális, kváziempirikus matematika nem a kétségbevonhatatlanul megalapozott tételek számának egyhangú növekedése révén fejlődik, hanem a találgatások szüntelen helyesbítésével, az elmélkedés és kritika, a bizonyítások és cáfolatok logikája segítségével.” (Lakatos 1981: 19).¹⁶

A bizonyítás fogalmát Lakatos nem a szigorú matematikai értelmezésnek

¹⁵ Maga a Cauchyval kapcsolatban levont tanulság is bekerült a *Bizonyítások és cáfolatok*ba: „A szigorúság forradalma, amely Cauchy nevéhez fűződik, azon a heurisztikus újításon alapult, hogy a matematikusnak nem szabad megállnia a bizonyításnál: tovább kell lépnie, és fel kell ismernie, mit bizonyít azáltal, hogy felsorolja a kivételeket, vagy inkább azáltal, hogy megállapítja azt a biztos tartományt, amelyben a bizonyítás érvényes” (Lakatos 1981: 88).

¹⁶ Turing kapcsán így írt Lakatos a formális rendszerek sajátosságairól: „A formalisták szerint a matematika a képletekbe foglalt matematikával azonos. De mit lehet felfedezni egy formalizált elméletben? Kétféle dolgot. Először: olyan problémák megoldását, amelyeket egy megfelelően programozott Turing gép véges időn belül képes megoldani. (Pl. bizonyítás-e valami, amiről ezt feltételezik, vagy nem?) Nincs olyan matematikus akít érdekelne annak a halálosan unalmas mechanikus módszernek a végigvitele, amelyet az efféle eldöntési eljárások előírnak. Másodsor: olyan problémák megoldását fedezheti fel az ember (pl.: egy eldönthetetlen elmélet egy bizonyos formulája tétel-e, vagy nem), ahol a ’szabályozhatatlan intuíció és a jó szerencse’ az egyetlen eligazító módszer. Az élő matematikában nemcsak ez a soványka választási lehetőség van egy gép racionalitása és a vak találgatás irracionalitása között.” (Lakatos 1981: 16-17)

megfelelően használta, vagyis nem az egy tételből való deduktív levezetést értette rajta, hanem az evidenssé tevés folyamatát. A bizonyítás fajtáit először az 1959 és 1961 között keletkezett *Mit bizonyít egy matematikai bizonyítás? (What does a mathematical proof prove?)* című írásában tematizálta, amely kétségbe vonta a bizonyítás formalizált ideáljának kizárólagosságát. Lakatos szerint nemcsak a preformális és a posztformális bizonyítás felelős a nem várt bizonytalanságokért, hanem a formális bizonyítások is kétségessé válnak (Lakatos 2021d: 98). A *Bizonyítások és cáfolatokban* – arra helyezve a hangsúlyt, hogy a nemformális bizonyítás megerősítő hatásával egyidejűleg lépnek föl az ellenpéldák is – így tűzte ki az alapszabályt: „Ha van egy sejtésed, kezd el bizonyítani és cáfolni” (Lakatos 1981: 81).

Lakatos matematikai formalizmussal való szembenállását az euklidészi rendszerről adott kritikája mutatja legjellegzetesebben. *A végtelen regresszus és a matematika alapjai (Infinite regress and foundations of mathematics, 1962)* című tanulmánya arra világított rá, hogy az euklidészi rendszer – konzisztenciájának megőrzése érdekében – határt szab a kérdezés folyamatának. Ilyenfajta határmegvonás az axiómák tekintetében minden formalista programban található (Lakatos 2021a: 16-23). Az „euklidészi rítust” később a zárt rendszerre alkalmazott rögzített módszer kényszereként jellemezte, amely elfedi az intuíció szerepét magában a rendszernek a genezisében is. Az általa „uralkodó elméletnek” nevezett deduktív rendszer tartalmában és módszerében egyaránt kötött, ezért a formalizmus kiküszöbölésére, a deduktív megközelítés helyébe a heurisztikát állította (Lakatos 1981: 22).¹⁷

Kalmár antiformalista bizonyítás-értelmezésének legfontosabb specifikuma szintén az volt, hogy az ellenpéldákkal való ütköztetést, mint a cáfolás egy fajtáját, magukra az axiómákra is kiterjesztette. A matematikai egzaktság

¹⁷ Máté András éppen e cikk alapján tartja Lakatost az infallibilista álláspont talán legradikálisabb képviselőjének. Vö. Máté 2021: 11.

értelmezésében ilyen módon nem az axiomatikus módszerrel azonos, hanem magának a bizonyításnak a szabályozott gyakorlatával. Kalmár és Lakatos munkásságának, a szemléletesség¹⁸ problémájához kapcsolódó empirizmus mellett a másik közös (részben a Debrecenből induló matematikus kör diskurzusaihoz köthető) eleme tehát az eldöntésprobléma, pontosabban az, ahogyan számos közös elemet tartalmazó felfogásuk a matematikai bizonyítás természetével kapcsolatos szemléletüket meghatározta.

Mivel Lakatos matematikai bizonyítással kapcsolatos álláspontjának formálódása egy matematikafilozófiai-matematikatörténeti problématerben zajlott le, az a megállapítása, hogy a bizonyítás nem bizonyít végérvényesen, nem értelmezhető pusztán a fallibilitás (hegeli történeti fejlődéséhez kapcsolódó) popperiánus tudományfilozófiai problematikájának keretében.¹⁹ E megállapítás evidensnek tűnhet, amennyiben az Euler-tételnek a *Bizonyítások és cáfolatok* klasszikussá érett dialógusából indulunk ki, viszont nem szabad megfeledkezni arról, hogy a tantermi dialógus egy olyan racionális rekonstrukció, illetve lábjegyzetekben megadott fejlődéstörténet, amely sokat mond Lakatos bizonyítással kapcsolatos nézeteiről, s valamelyest kevesebbet azzal kapcsolatban, hogy e felfogása milyen tág spektrumú matematikai-matematikatörténeti bázison alakult ki.²⁰

Lakatos számos olyan matematikatörténeti vonatkozást is felvetett cikkeiben,

¹⁸ A szemléletesség fogalmának Kalmár matematikafilozófiájára gyakorolt hatását Szabó Máté mutatta ki (Szabó 2013: 3-5).

¹⁹ A bizonyítás problémájával összefüggésben Golden Dániel a lakatosi matematikafilozófiai mögött – nem vizsgálva a Lakatos műveiben és kapcsolati hálójában egyaránt nyomon követhető matematikai vonatkozásokat – a popperi-hegeli hatások elrejtését, illetve előbukkanását látta: „Lakatos matematika-filozófiájának egyik legprovokatívabb állítása, hogy a bizonyítás nem a bizonyosság elérésének eszköze, hanem a további kutatásé, köztes lépcsőfok csupán a tudományos tudás termelésének folyamatában” (Golden 2008: 191).

²⁰ Stewart Shapiro az Euler-tételről folyó vita kapcsán párhuzamot látott a Lakatos által a *Bizonyítások és cáfolatok*ban tárgyalt eset és a Church-tézis között. (Shapiro 2006: 435-438).

amelyek közvetlenül a bizonyíthatóság problémájára fókuszáltak. A több írásában is felbukkanó axiomatizálás-, illetve bizonyításprobléma olyan – az övéhez számos ponton és időpontban kapcsolódó Kalmár életművel párhuzamosságot mutató – perszeveráló elemek, amelyek túlmutatnak matematikafilozófiai periódusán, s a tudományfilozófiai koncepciójának is fontos gondolati elemét képezik.

Lakatos bizonyításfogalmát tudományfilozófiai konnotációban sem pusztán a logikai pozitivisták és a popperiánusok értelmezéseihez képest kell pozicionálnunk, lévén hogy a *Bizonyítások és cáfolatok*ban kifejtett matematikai értelmezés és a vele párhuzamosan formálódó tudományos kutatási programok elmélete között közvetlen áthallások, illetve átjárások vannak.

A kritika és a tudományos kutatási programok metodológiája (Criticism and the Methodology of Scientific Research Programmes, 1970) című tanulmányában például matematikai tárgyú cikkeiben felvázolt bizonyításfogalmának analógiájára – s nem mellesleg Kalmár bizonyításértelmezéséhez hasonló módon – értelmezte az elméletek tesztelésének folyamatát, vagyis szinte változatlan formában vitte át a bizonyításnak a *Bizonyítások és cáfolatok* lapjain leírt processzusát a kutatási programok metodológiájára:

„A bírálat tehát nem feltételezi a teljesen kifejtett deduktív struktúrát, hanem megteremti azt. A valódi deduktív magyarázó modell folytonosan változik, új kijelentések járulnak hozzá és régiék maradnak el.” (Lakatos 1997: 40)

Mivel Lakatos cambridge-i disszertációjától több szövegvariáns on át jutott el a *Bizonyítások és cáfolatok* 1963/64-es, folyóiratcikként való megjelentetéséig, az azonos című könyvet pedig 1976-ban, már a hagyatékából adták ki tanítványai, matematikai bizonyításfogalmának alakulása meglehetősen bonyolult kapcsolatban áll tudományfilozófiai felfogásának formálódásával.

Ennek a szöveghálózatnak a feltárása behatóbb vizsgálatot igényel, s csupán ilyen módon lenne tisztázható Lakatos Kalmár-recepciójának pontos kronológiája is. Az azonban az eddigiek alapján is igen valószínűnek látszik, hogy a matematikai aspektusú bizonyításfogalom a magyarországi és angliai periódusra tagolódó kutatói pálya egyik legfontosabb kontinuitáseleme volt.

Irodalom

- Bandy, Alex. 2010. *Chocolate and Chess: Unlocking Lakatos*. Budapest: Akadémiai Kiadó.
- Dénes, Tamás. 2003. A. M. Turing különös világa: A Turing-géptől a rejtjelfejtő Bombe-ig. *Középiskolai Matematikai Lapok* 53(1): 7-15.
- Dusek, Val. 2015. Lakatos between Marxism and the Hungarian heuristic tradition. *Studies in East European Thought* 67(1–2): 61-73.
- Easley, Jack A. 1967. Logic and heuristic in mathematics curriculum reform. In: *Problems in the Philosophy of Mathematics*. Edited by Imre Lakatos. Amsterdam: North-Holland, 208-241.
- Forrai, Gábor. 1993. From the method of proofs and refutations to the methodology of scientific research programmes. *International Studies in the Philosophy of Science* 7(2): 161-175.
- Glas, Eduard. 2001a. “The Popperian Programme” and Mathematics. Part I: The Fallibilist Logic of Mathematical Discovery. *Studies in History and Philosophy of Science Part A* 32(1): 119-137.
- Glas, Eduard. 2001b: “The Popperian Programme” and Mathematics. Part II: From Quasi-Empiricism to Mathematical Research Programmes. *Studies in History and Philosophy of Science Part A* 32(2): 355-376.
- Golden, Dániel, 2008. Lakatos Imre elfojtott hegelianizmusa. *Világosság* 49(3-4): 185-96.

- Gurka, Dezső. 2002. A Karácsony-körrel való kapcsolat mint Lakatos munkásságának egy lehetséges kontinuitáseleme. In: *Műhelytanulmányok*. Szerkesztette Percz László. Budapest: Budapesti Műszaki és Gazdaságtudományi Egyetem, 99-106.
- Gurka, Dezső. 2004. Kalmár László szerepe Lakatos Imre matematikafilozófiájának alakulásában. In: *A kreativitás mintázatai. Magyar tudósok, magyar intézmények a modernitás kihívásában*. Szerkesztette Békés Vera. Budapest: Áron, 258-279.
- Gurka, Dezső. 2006. A Missing Link: The Influence of László Kalmár's Empirical view on Lakatos's Philosophy of Mathematics. *Perspectives on Science* 14(3): 263-280.
- Hacking, Ian. 1979. Imre Lakatos's Philosophy of Science. *British Journal for the Philosophy of Science* 30: 381-410.
- Kalmár, László. 1943. Egyszerű példa eldönthetetlen aritmetikai problémára. *Matematikai és Fizikai Lapok* 50: 1-23.
- Kalmár, László. 1967. Foundations of mathematic – whitner now? In: *Problems in the Philosophy of Mathematics*. Edited by Imre Lakatos. Amsterdam: North-Holland, 187-207.
- Kalmár, László. 1986a. Levél az integrálról. In: *Integrállevél. Matematikai írások*. Szerk. Varga Antal Budapest: Gondolat, 186-267.
- Kalmár, László. 1986b. A matematikai egzaktság fejlődése a szemlélettől az

- axiomatikus módszerig. In: *Integrállevél. Matematikai írások*. Budapest: Gondolat, 1986, 37-61.
- Kalmár, László. 1986c. Előadások a matematika filozófiai problémáiról. In: *Integrállevél. Matematikai írások*. Budapest: Gondolat, 62-170.
- Kiss, Olga. 2002. Mathematical Heuristic – Lakatos and Pólya. In: *Appraising Lakatos. Mathematics, Methodology and the Man*. Edited by George Kamps and Ladislav Kvasz and Michael Stölzner. Dordrecht - Boston – London: Kluwer, 243-254.
- Koetsier, Teun. 1991. *Lakatos Philosophy of mathematics: a historical approach*. New-York-Amsterdam: North-Holland.
- Kontra, György. 1995. *Karácsony Sándor*. Budapest: Országos Pedagógiai Könyvtár és Múzeum.
- Kutrovátz, Gábor. 2002. Imre Lakatos' Hungarian Dissertation. In: *Appraising Lakatos. Mathematics, Methodology and the Man*. Edited by George Kamps and Ladislav Kvasz and Michael Stölzner. Dordrecht - Boston – London: Kluwer, 353-355.
- Kutrovátz, Gábor. 2008. Lakatos' philosophical work in Hungary. *Studies in East European Thought* 60(1-2):113-133.
- Lakatos, Imre. 1981. *Bizonyítások és cáfolatok*, Budapest: Gondolat.
- Lakatos, Imre. 1997. A kritika és a tudományos kutatási programok metodológiája. In: *Lakatos Imre tudományfilozófiai írásai*. Fordította Benedek

András és Forrai Gábor. Budapest: Atlantisz, 19-64.

Lakatos, Imre. 2021a. A végtelen regresszus és a matematika alapjai. Fordította Kiss Olga. In: *A gyakorló matematikus filozófiája*. Szerkesztette Máté András. Budapest: Typotex, 15-40.

Lakatos, Imre. 2021b. Az empirizmus reneszánsza a mai matematikafilozófiában? Fordította Kiss Olga. In: *A gyakorló matematikus filozófiája*. Szerkesztette Máté András. Budapest: Typotex, 41-65.

Lakatos, Imre. 2021c. Cauchy és a kontinuum: A nemstandard analízis jelentősége a matematika történetében és filozófiájában. Fordította Kiss Olga. In: *A gyakorló matematikus filozófiája*. Szerkesztette Máté András. Budapest: Typotex, 66-87.

Lakatos, Imre. 2021d. Mit bizonyít egy matematikai bizonyítás? Fordította Kiss Olga. In: *A gyakorló matematikus filozófiája*. Szerkesztette Máté András. Budapest: Typotex, 88-98.

Long, Jancis. 2002. The Unforgiven: Imre Lakatos' Life in Hungary. In: *Appraising Lakatos. Mathematics, Methodology and the Man*. Edited by George Kampis and Ladislav Kvasz and Michael Stölzner. Dordrecht – Boston – London: Kluwer, 263-302.

Máté, András. 2006. Árpád Szabó and Imre Lakatos, or the relation between history and philosophy of mathematics, *Perspectives on Science* 14 (3): 282-301.

Máté, András. 2008. Kalmár László és Péter Rózsa – matematikusok a

- filozófiáról. In: *Kalmárium II. Kalmár László levelezése magyar matematikusokkal*. Összeállította Szabó Péter Gábor. Szeged: Szegedi Egyetemi Kiadó, 56-71.
- Máté, András. 2008. Lakatos Imre – egy nyugtalanító gondolkodó. In: *A gyakorló matematikus filozófiája*. Szerkesztette Máté András. Budapest: Typotex, 7-14.
- Palló, Gábor. 1996. Párhuzamok és metszéspontok: Lakatos Imre és Polányi Mihály. *Replika* 23–24: 39–50.
- Péter, Rózsa 1952. Az eldöntésprobléma visszavezetése logikai formulák véges halmazán való kielégíthetőség kérdésére. *Az I. Magyar Matematikai Kongresszus Közleményei*, augusztus 27.-szeptember 2. Szerkesztette Alexits György és Császár Ákos. Budapest: Akadémiai Kiadó, 164-189.
- Péter, Rózsa. 1959. Rekursivität und Konstruktivität. In: *Constructivity in Mathematics* .Edited by Arend Heyting. New-York-Amsterdam: North-Holland, 226-233.
- Ravetz, Jerome R. 2004. An Hungarian Tragedy. *Inquiry: An Interdisciplinary Journal of Philosophy* 47 (4): 413-422.
- Ropolyi, László. 2002. Lakatos and Lukács. *Appraising Lakatos. Mathematics, Methodology and the Man*. Edited by George Kampis, Ladislav Kvasz and Michael Stölzner. Dordrecht - Boston –London: Kluwer, 303-337.
- Shapiro, Stewart. 2006. Computability, Proof, and Open-texture. In: *Church's thesis after 70 years*. Edited by Adam Olszewski, Jan Wolenski and Robert Janusz. Heusenstamm: Ontos, 420-455.

Sherry, David. 2006. Mathematical reasoning: induction, deduction and beyond. *Studies History and Philosophy of Science Part A* 37(3):489-504.

Szabó, Máté. 2013. Karácsony Sándor nyelvfelfogásának hatása Kalmár László matematikafilozófiájára. In: *Nehogy érvgyüölök legyünk. Tanulmánykötet Máté András 60. születésnapjára*. Szerkesztette Zvolenszky Zsófia és mások. Budapest: L'Harmattan, 164-173.

Szabó, Máté. 2018. Kalmár's Argument Against the Plausibility of Church's Thesis. *History and Philosophy of Logic* 39(2):140-157.

Szabó, Péter Gábor. 2008. *Kalmárium II. Kalmár László levelezése magyar matematikusokkal*. Összeállította Szabó Péter Gábor. Szeged: Szegedi Egyetemi Kiadó.

Toulmin, Stephen. 1976. History, Praxis and the 'Third World'. In: *Essays in Memory of Imre Lakatos*. Edited by Robert S. Cohen, Paul K. Feyerabend and Marx W. Wartofsky. Dordrecht – Boston: Reidel, 655-675.